

第 1 章

特殊相対性理論

1.1 相対性原理

物理現象を考えるにあたって、相対性というのは重要である。Newton の運動法則においても暗に相対性は含まれている。これは第 1 法則から、全ての慣性系が等価であると言える。すなわち全ての慣性系で物理法則は不変である。Newton 力学では**ガリレイの相対性原理**が成り立つ。これは物理法則が**ガリレイ変換**において不変であることを言っている。ある慣性系 I に対して一定速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する慣性系 I' を考える。慣性系 I の座標 $\boldsymbol{r}$ から慣性系 I' の座標 $\boldsymbol{r}'$ へのガリレイ変換は、

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t \quad (1.1)$$

となる。Newton の運動方程式は

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \quad (1.2)$$

である。これが 2 つの慣性系で同じ形をとることを示す。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}t) \\ &= \frac{d^2 \boldsymbol{r}'}{dt^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

となるため、運動方程式はガリレイ変換のもと不変であることがわかる。

しかし実は Newton 力学は光速に対して十分に小さい範囲でしか成り立たない。物体の速度が光速に近くなる系では別の変換を考える必要がある。この変換が**ローレンツ変換 (Lorentz transformation)**である。

1.2 ミンコフスキー時空

なぜ光速近くでは Newton の運動方程式がうまく行かないのか。あまり深く立ち入ることは避けるが、これは電磁気学に由来する。光は電磁波であり、電磁気学を用いて考察すべきである。電磁気学の基本方程式が Maxwell 方程式であることはすでに知っていることだろう。実は Maxwell 方程式はガリレイ変換のもと不変ではない。ガバガバな考察ではあるが、慣性系の間で Maxwell 方程式が変わると、紆余曲折をへて慣性系ごとに光速度が変わると結論づけられる。これは少し不自然なように思える。従って、電磁気学を中心に相対性を考慮した方が良さそうである。ここで登場するのがローレンツ変換である。Maxwell 方程式はローレンツ変換のもと不変となっている。このことは次の 2 つの原理にまとめられる。

- 光速不変の原理: 全ての慣性系で光速 c は一定である。
- 特殊相対性原理: 全ての慣性系は等価である。

物理的なイメージはここまでにして、数学的な性質を学んでいこう。数学的にはローレンツ変換とは、ミンコフスキー空間 (Minkowski space) 上の等長変換としている。等長変換とは、ある空間上で定義された“長さ”を変換前後で変えない変換を指す。なじみ深いユークリッド空間上で自然に導入される長さ (の2乗) は、

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.4)$$

この長さを変えない変換は、直交行列による変換である。これをちょっとしたイメージとして持っていて、ミンコフスキー空間へと移っていこう。ミンコフスキー空間上での長さを**世界間隔**という。ミンコフスキー空間内の座標は4つの数 $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ で指定する。直交座標における世界間隔の2乗を、

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (1.5)$$

アインシュタインの和の規約を用いていることに注意しよう。ここで、突然出てきた $\eta_{\mu\nu}$ は**計量テンソル**と呼ばれ、ミンコフスキー空間においては、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

である。ユークリッド空間においては、

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

が計量テンソルである。すなわち、計量テンソルとは、内積から長さを導くようなテンソルであると言える。計量という言葉からも類推できよう。

さて、ではローレンツ変換について触れていこう。空間が等方的、均一であるとする。Maxwell 方程式を不変に保つ変換はローレンツ変換に加えて並進操作も存在する。これらを合わせたものは**ポアンカレ変換 (Poincaré transformation)**と呼ばれる。さらに、ローレンツ変換は、ローレンツブースト、空間回転、空間反転、時間反転を合わせたものを言う。この内空間に関する操作はユークリッド空間内に定義されるようなものと同じように定義できる。この4操作を合わせて**ローレンツ群**と呼び、 $O(3, 1)$ と表記する。ⁱ慣性系 $\{x^\mu\}$ から慣性系 $\{x'^\mu\}$ への変換は、

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad (1.8)$$

を満たすような1次変換で、

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (1.9)$$

ⁱ 一般に、 $-(x^1)^2 - (x^2)^2 - \dots - (x^p)^2 + (x^{p+1})^2 + \dots + (x^{p+q})^2$ が不変に保たれるような変換の成す群は $O(p, q)$ と表記するらしい。

としてつながれる。

ただし、空間や時間反転については物理法則が必ず不変に保たれる訳ではないため、ローレンツブーストと空間回転の成す変換のみについて考える。これらの変換は併せて、**本義ローレンツ変換**と呼ばれ、以降はこれをローレンツ変換と呼ぶ。ⁱⁱ本義ローレンツ変換が成す群を本義ローレンツ群 $O_+^\uparrow(3,1)$ と呼ぶ。この群の元は $\det \Lambda = 1, \Lambda^0_0 \geq 1$ を満たす。

ローレンツ変換の具体的な表示を考えていこう。 x 軸方向に相対速度 v で運動する慣性系への変換行列は、

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \omega & -\sinh \omega & 0 & 0 \\ -\sinh \omega & \cosh \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

で与えられる。ただし、

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \tanh \omega = \beta \quad (1.11)$$

を満たす。もっと具体的に表記すると、

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x' = \frac{x - \frac{v}{c}ct}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (1.12)$$

双曲線関数の性質から、この変換が世界間隔を不変に保つことは明らかだろう。今は x 軸方向へのローレンツブーストを扱ったが、任意の方向に運動している場合には、適当に空間座標について回転操作をしてやれば良い。ⁱⁱⁱ

これまでは座標変換について考えたが、座標が変わればそれに伴って場も変換を受けるべきである。以下数種類の場の変換性を紹介する。ただし、全ての場がこれらいずれかの性質を有するわけではないことに注意すること。以下全てプライムの有無で変換前後を区別する。

(1) スカラー場 $\Theta(x)$

$$\Theta'(x') = \Theta(x) \quad (1.13)$$

スカラー場は座標変換前後で不変である、

(2) 反変ベクトル場 $V^\mu(x)$

$$V'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu(x) \quad (1.14)$$

これからわかるように、反変ベクトル場は通常の座標と同じ変換性を有する。

(3) 共変ベクトル場 $W_\mu(x)$

$$W'_\mu(x') = W_\nu(x)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \equiv \Lambda_\mu{}^\nu W_\nu(x) \quad (1.15)$$

少し考察すればわかるが、共変ベクトル場は $\partial/\partial x^\mu$ と同じ変換性を有する。

ⁱⁱ 群論の言葉を用いれば、本義ローレンツ群はローレンツ群の部分群をなす。また、本義ローレンツ群から連続変換で空間反転、時間反転を含む変換へとつながることはない。

ⁱⁱⁱ これが許されるのは $O_+^\uparrow(3,1)$ の元に空間回転が含まれるためである。

(4) i 階反変 j 階共変テンソル場 $T^{\mu_1 \cdots \mu_i}_{\nu_1 \cdots \nu_j}(x)$

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_i}_{\nu_1 \cdots \nu_j}(x') = \Lambda^{\mu_1}_{\alpha_1} \cdots \Lambda^{\mu_i}_{\alpha_i} \Lambda_{\nu_1}^{\beta_1} \cdots \Lambda_{\nu_j}^{\beta_j} T^{\alpha_1 \cdots \alpha_i}_{\beta_1 \cdots \beta_j}(x) \quad (1.16)$$

以上からわかるように、反変成分を表す添え字は右上に、共変成分を表す添え字は右下に表記することが一般的である。また、反変成分と共変成分は簡単に変換することができて、 $V_\mu(x) = \eta_{\mu\nu} V^\nu(x)$ 、 $W^\mu(x) = \eta^{\mu\nu} W_\nu(x)$ とすれば良い。また、 $V^\mu(x) W_\mu(x)$ と定義される**スカラー積**はスカラー場となり、ローレンツ変換で不変な量となる。

ミンコフスキー空間内でもベクトルの長さを世界間隔と同様にとることができる。ここで、世界間隔の定義からわかるように、通常のユークリッドノルムと違ってこの値は負にもなるし、成分が非零でも零になり得る。従って、ベクトルは3種類に分類できる。 $A^2 \equiv \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$ とする。 $A^2 > 0$ のとき、 A^μ は**時間的ベクトル**、 $A^2 = 0$ のときは**光的ベクトル** (ヌルベクトル)、 $A^2 < 0$ のときは**空間的ベクトル**と呼ばれる。

このことをミンコフスキー空間内の異なる2点について考えてみよう。 $(x - y)^2$ を分類すれば良い。 $(x - y)^2 < 0$ のとき、これら2点は空間的である。このとき、これら2点には因果関係がない。 $(x - y)^2 > 0$ のとき、2点は時間的である。このときには2点の間で因果関係が成立する。以上を整理すると、空間的な2点は**同時に**存在できる。裏を返せば時間的に到達できない。逆に時間的な2点は同時に存在できないが、時間的に到達できる。これらは**因果律**として知られ、物理現象は因果律を満たさなくてはならない。

因果律:原因から生じる影響は、光の速さより速くは伝わらない。

1.3 特殊相対論的力学

特殊相対論に基づき、力学を修正していこう。物理現象を理解するために、粒子の時間発展を知りたいのだが、ローレンツ変換によってただの時間はこの尺度として用いることは不適とわかるだろう。ここで、ローレンツ不変な時間パラメータを次のように定義する。

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = \frac{dx^\mu dx_\mu}{c^2} \quad (1.17)$$

このような τ を**固有時**と呼ぶ。定義からわかるようにしっかりとローレンツ不変な量となっていよう。また、固有時とは物体が静止しているように見える座標系での時間を表すことも同様にわかるはずだ。定義から、

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} dt = \sqrt{1 - \beta^2} dt \quad (1.18)$$

と、固有時と時間の関係を表せる。ただし、 $\mathbf{v}$ は、3次元空間の意味での速度である。固有時を用いて Newton 力学から類推される量を定義する。まず運動量を4元ベクトルとして、

$$p^\mu \equiv m \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad p_\mu \equiv m \frac{dx_\mu}{d\tau} \quad (1.19)$$

これは**4元運動量**と呼ばれる。また、 $dx^\mu/d\tau$ は**4元速度**である。 p^μ の大きさは、

$$p^\mu p_\mu = m^2 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} = m^2 c^2 \quad (1.20)$$

すなわち、4 元運動量の大きさは定数とわかる.^{iv}

力も Newton 力学から自然に導入できて、

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (1.21)$$

として **4 元力**, $f^\mu = (f^0, \mathbf{f})$ を定義できる. 4 元運動量と力には、

$$\frac{d}{d\tau}(p^\mu p_\mu) = 2f^\mu p_\mu = 0 \quad (1.22)$$

の関係がある.

4 元運動量と、非相対論的な運動量の関係を見ていこう.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \\ &= \mathbf{f} \frac{d\tau}{dt} \\ &= \mathbf{f} \sqrt{1 - \beta^2} \equiv \mathbf{F} \end{aligned} \quad (1.23)$$

として、非相対論的な力 $\mathbf{F}$ との関係がわかる. また、(1.22) より

$$f^\mu \frac{dx_\mu}{d\tau} = 0 \quad (1.24)$$

$$f^0 c = \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \quad (1.25)$$

これより、

$$\begin{aligned} p^0 c &= \int f^0 c d\tau \\ &= \int \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} d\tau \\ &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.26)$$

すなわち 4 元運動量の第 0 成分はエネルギーを意味するとわかる.

以上から、4 元運動量についての以下の関係式が導かれる.

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.27)$$

また、

$$\begin{aligned} E &= p^0 c \\ &= m \frac{dx^0}{d\tau} c \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + O(\beta^6) \end{aligned} \quad (1.28)$$

^{iv} 物理的にこれがどんな意味を持っているかは、物体が静止しているような系での運動を考えてみるとわかる.

と計算できる．非相対論的極限は $\beta \rightarrow 0$ とすればよく，この極限では第3項以降は無視でき，第2項がよく知る運動エネルギーとなっているとわかる．4元運動量の空間成分については，

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.29)$$

と変形でき，非相対論的な運動量を $\sqrt{1-\beta^2}$ を補正として付け加わっているとわかる．

自由粒子の運動を相対論的に考察してみよう．今は運動方程式を出発点にせず，作用積分から解析してみる．自由粒子の作用積分は，

$$\begin{aligned} S &= -mc \int ds \\ &= -mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \\ &= -mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$= -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2} dt = \int L dt \quad (1.31)$$

ここで， L はラグランジアン， λ は一般パラメータである．一般座標を x^μ として，一般運動量を求めよう．

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2} \right) \\ &= \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \quad (1.32)$$

として，(1.29) が導かれる．一般運動量が求まったので，ハミルトニアンを求めてみよう．

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} - L \\ &= c\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2} \end{aligned} \quad (1.33)$$

$H = E$ のとき，これは4元運動量についての関係式に一致する.^v

1.4 電磁気学

前述の通り，電磁気学はローレンツ共変な理論であり，よく知られているように基本方程式は次のMaxwell方程式である．

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.35)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.36)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.37)$$

^v この項は加筆する可能性あり

また、相対論における因果律を満たすために連続の方程式が課される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.38)$$

非相対論的には連続の方程式はあまりきれいな形では内容に思える。この方程式を相対論的に記述してみよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0 \\ \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0 \\ \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

ここで、 $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ と定義した **4 元電流密度** である。4 元電流密度は 4 元ベクトルである。この式だと、明確に発散が 0 と解釈できる。

(1.34) から、磁場 $\mathbf{B}$ はあるベクトル場 $\mathbf{A}$ があって、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.40)$$

と書ける。これを (1.36) に代入して変形することで、電場 $\mathbf{E}$ はあるスカラー場 ϕ があって、

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.41)$$

と書ける。これらを使っていない方程式に代入することで、 $\phi, \mathbf{A}$ に関する方程式を得られる。(1.41) を (1.35) に代入すると、

$$\begin{aligned} -\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \left(\frac{\phi}{c}\right) - \frac{\partial}{\partial(ct)} \left(\frac{\partial}{\partial(ct)} \left(\frac{\phi}{c}\right) + \nabla \cdot \mathbf{A}\right) &= \mu_0 c \rho \end{aligned} \quad (1.42)$$

ただし途中で $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$ を用いている。次に (1.40), (1.41) を (1.37) に代入すると、

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \\ -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \mu_0 \mathbf{j} \\ \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{\partial}{\partial(ct)} \left(\frac{\phi}{c}\right) + \nabla \cdot \mathbf{A}\right) &= \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned} \quad (1.43)$$

以上の結果はまとめて表記することができる。

$$A^\mu \equiv \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A}\right), \quad A_\mu \equiv \left(\frac{\phi}{c}, -\mathbf{A}\right) \quad (1.44)$$

と 4 元電磁ポテンシャルを定義すると、

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \mu_0 j^\mu \quad (1.45)$$

ただし省略表記として、 $\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu = (\partial^0, -\nabla)$, $\partial_\nu = \partial/\partial x^\nu = (\partial_0, \nabla)$ を用いた。この方程式はもう少し書き直すことができ、2 階テンソル $F^{\mu\nu}$ を

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1.46)$$

を用いると,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (1.47)$$

と書ける. ただし $F^{\mu\nu}$ は定義から完全反対称テンソルとわかり,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

である. またローレンツ変換性は,

$$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}(x) \quad (1.49)$$

であるため, 電場と磁場は2階反変テンソル場であるとわかる. その他に $F^{\mu\nu}$ が満たす方程式として,

$$\partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0 \quad (1.50)$$

がある. これは (1.34) と (1.36) に対応する.

この方程式は変分原理からも求めることができる. ラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu \quad (1.51)$$

として, 作用積分を

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_{EM} d^4x \quad (1.52)$$

としてやればよい.

電荷 q を持つ荷電粒子の運動方程式は,

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = q F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau} \quad (1.53)$$

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.54)$$

である. 作用積分は, 自由粒子に電磁場との相互作用の項が加わり,

$$S = \int \left(-mc \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} - q A_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) d\lambda \quad (1.55)$$

$$= \int \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2} - q\phi + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) dt = \int L dt \quad (1.56)$$

となる. これより共役な運動量は,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \\ &= \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + q\mathbf{A} \end{aligned} \quad (1.57)$$

となる. 非相対論的極限をとるとよく知るような結果になるため妥当だろう. 従ってハミルトニアンは,

$$H = \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} - L = c \sqrt{m^2 c^2 + (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2} + q\phi \quad (1.58)$$

となる, これは自由粒子のハミルトニアンにおいて,

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu, \quad H \rightarrow H - q\phi \quad (1.59)$$

としたものであるとわかる.