第 2 章

Dirac 方程式のローレンツ共変性

2.1　γ 行列による Dirac 方程式の表示

(3.18) の両辺に左から $(1/c)\beta$ をかけ，$\gamma^0 \equiv \beta, \gamma^i \equiv \beta\alpha^i$ をまとめて γ^μ，$x^\mu = (ct, x, y, z)$ とすると Dirac 方程式は,

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_e c\right)\psi(x) = 0 \tag{2.1}$$

とまとめられる．ここで γ^μ は γ **行列**と呼ばれる **Clifford 代数**で，反交換関係

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I \tag{2.2}$$

を満たすような 4×4 行列である．また，以降は特に断りがなければ引数 x は x^μ を表すものとする．

γ^0 は Hermite 行列であり，γ^i は反 Hermite 行列である．これは α^i と β の間の反交換関係から導かれ,

$$\left(\gamma^i\right)^\dagger = \left(\beta\alpha^i\right)^\dagger = (\alpha^i)^\dagger\beta^\dagger = \alpha^i\beta = -\beta\alpha^i = -\gamma^i \tag{2.3}$$

となり確かに反 Hermite 行列とわかる．また，Dirac 表示における γ 行列は,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = I \otimes \sigma^3, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \sigma^i \otimes i\sigma^2 \tag{2.4}$$

と表示される．[i]

電磁相互作用のある系においても，微分演算子を今までと同様に置き換えてやれば良い．ただしここで用いるべきは 4 元電磁ポテンシャルであり,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} - qA_\mu(x) = i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i\frac{q}{\hbar}A_\mu(x)\right] \tag{2.5}$$

と表せる．従って Dirac 方程式は,

$$\left[i\hbar\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i\frac{q}{\hbar}A_\mu(x)\right) - m_e c\right]\psi(x) = 0 \tag{2.6}$$

となる．

---

[i] ここで，$\otimes$ は直積であり，次のように定義される．A, B を 2×2 行列として,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} \\ Ab_{21} & Ab_{22} \end{pmatrix}$$

2.2 ローレンツ共変性に関する条件式

γ 行列を用いて方程式のローレンツ変換性を考察する．まずは本義ローレンツ変換についての変換性を考えていこう．

慣性系 I と慣性系 I' が $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$ で結びつけられているとき，それぞれの慣性系においての Dirac 方程式は，

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m_e c\right)\psi(x) = 0 \tag{2.7}$$

$$\left(i\hbar\gamma'^{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - m_e c\right)\widetilde{\psi}(x') = 0 \tag{2.8}$$

となる．ただし，γ'^{μ} は Clifford 代数で 4×4 の行列である．また，(2.2) を満たすような行列は互いに Unitary 同値であるため，適当な Unitary 行列 U を用いて

$$\gamma'^{\mu} = U^{\dagger}\gamma^{\mu}U \tag{2.9}$$

という関係が成り立つ．ここで，$\psi'(x') \equiv U\widetilde{\psi}(x')$ と定義する．(2.8) に左から U を作用させることで，

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - m_e c\right)\psi'(x') = 0 \tag{2.10}$$

を得られる．

$\psi(x)$ が本義ローレンツ変換の下で

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \tag{2.11}$$

と線形変換されることを仮定しよう．$S(\Lambda)$ は $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ に依存する 4×4 の行列である．また，ローレンツ変換は群を為すことから必ず逆変換が存在することから，

$$\psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = S^{-1}(\Lambda)\psi'(\Lambda x) \tag{2.12}$$

が成り立つ．一方，ローレンツ変換の逆変換を用いることで，

$$\psi(x) = S(\Lambda^{-1})\psi'(x') = S(\Lambda^{-1})\psi'(\Lambda x) \tag{2.13}$$

ともかける．従って $S^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda^{-1})$ が成り立つ．

まずは $S(\Lambda)$ の満たすべき条件を求める．(2.7) に左から $S(\Lambda)$ を作用させると，

$$\left(i\hbar S(\Lambda)\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - S(\Lambda)m_e c\right)\psi(x) = 0$$

$$\left(i\hbar S(\Lambda)\gamma^{\mu}S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\Lambda^{\nu}{}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} - S(\Lambda)m_e c\right)\psi(x) = 0$$

$$\left(i\hbar S(\Lambda)\gamma^{\mu}S^{-1}(\Lambda)\Lambda^{\nu}{}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} - m_e c\right)\psi'(x') = 0 \tag{2.14}$$

これより，(2.10) と (2.14) が一致するためには，

$$S(\Lambda)\gamma^{\mu}S^{-1}(\Lambda)\Lambda^{\nu}{}_{\mu} = \gamma^{\nu}, \qquad \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu} = S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\nu}S(\Lambda) \tag{2.15}$$

が成り立つ必要がある．注意すべきは，ここでは $S(\Lambda), \gamma^\mu$ は行列であるが $\Lambda^\nu{}_\mu$ は数であることである．そのため可換である．[ii]

2.3　ディラックスピノルのローレンツ変換性

次に $S(\Lambda)$ の具体形を求めていこう．任意のローレンツ変換は無限小変換を逐次行っていくことで構成することができる．そこで，無限小ローレンツ変換を無限小パラメータ $\Delta\omega^\nu{}_\mu$ を用いて

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \delta^\nu{}_\mu + \Delta\omega^\nu{}_\mu \tag{2.16}$$

とする．ただし，ローレンツ変換の満たすべき性質を用いることで，

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta &= \eta_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\alpha + \Delta\omega^\mu{}_\alpha)(\delta^\nu{}_\beta + \Delta\omega^\nu{}_\beta) \\ &= \eta_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta + \delta^\mu{}_\alpha\Delta\omega^\nu{}_\beta + \delta^\nu{}_\beta\Delta\omega^\mu{}_\alpha + O(\Delta\omega^2)) \\ &= \eta_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\nu}\Delta\omega^\nu{}_\beta + \eta_{\mu\beta}\Delta\omega^\mu{}_\alpha + O(\Delta\omega^2) \\ &= \eta_{\alpha\beta} + \Delta\omega_{\alpha\beta} + \Delta\omega_{\beta\alpha} + O(\Delta\omega^2)\end{aligned} \tag{2.17}$$

これが $\eta_{\alpha\beta}$ に一致すべきであるため，2 次以降は無視して $\Delta\omega_{\alpha\beta} = -\Delta\omega_{\beta\alpha}$ となり完全反対称テンソルとなる．[iii]

$S(\Lambda)$ は $\Delta\omega^{\mu\nu}$ で展開される．1 次までで，

$$S(\Lambda) = I - \frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}, \qquad S^{-1}(\Lambda) = I + \frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \tag{2.18}$$

となるとする．ここでは $\sigma_{\mu\nu}$ は 4×4 の行列である．これを求めた関係式に代入すると，左辺右辺はそれぞれ 1 次までで

$$\Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu = \gamma^\nu + \Delta\omega^\nu{}_\mu\gamma^\mu \tag{2.19}$$

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda) = \gamma^\nu + \frac{i}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\gamma^\nu - \frac{i}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\gamma^\nu \tag{2.20}$$

となるため，

$$\Delta\omega^\nu{}_\mu\gamma^\mu = \frac{i}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}[\sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\nu] \tag{2.21}$$

が導かれる．これを満たすような $\sigma_{\alpha\beta}$ として

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta} &= \frac{i}{2}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \\ &= \frac{i}{2}(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha) = i(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \eta_{\alpha\beta}I)\end{aligned} \tag{2.22}$$

[ii] 和こそとってはいるが，やはりただの数は行列と可換である．もちろん γ^ν と $S(\Lambda)$ は一般に可換とは言えないため，その順番に気をつけるべきである．

[iii] 上付きのときも同様の関係が成り立つ

がある.[iv] これを条件式に代入すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}[\sigma_{\alpha\beta},\gamma^\nu] &= -\frac{1}{4}[\gamma_\alpha\gamma_\beta,\gamma^\nu] \\
&= -\frac{1}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta) \\
&= -\frac{1}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}\{\gamma_\alpha(-\gamma^\nu\gamma_\beta + 2\delta^\nu{}_\beta I) - (-\gamma_\alpha\gamma^\nu + 2\delta^\nu{}_\alpha)\gamma_\beta\} \\
&= -\frac{1}{4}\Delta^{\alpha\beta}2(\gamma_\alpha\delta^\nu{}_\beta - \delta^\nu{}_\alpha\gamma_\beta) \\
&= -\frac{1}{2}(\Delta\omega^{\alpha\nu}\gamma_\alpha - \Delta\omega^{\nu\beta}\gamma_\beta) \\
&= \frac{1}{2}(\Delta\omega^{\nu\alpha}\gamma_\alpha + \Delta\omega^{\nu\beta}\gamma_\beta) \\
&= \Delta\omega^{\nu\alpha}\gamma_\alpha \\
&= \Delta\omega^\nu{}_\mu\gamma^\mu
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

となり条件を満たす.[v]

以上の結果を踏まえて，無限小変換から導かれる本義ローレンツ変換の公式は,

$$
\begin{aligned}
x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\
\Lambda^\mu{}_\nu &= \lim_{N\to\infty}(\delta^\mu{}_{\mu_1} + \Delta\omega^\mu{}_{\mu_1})(\delta^{\mu_1}{}_{\mu_2} + \Delta\omega^{\mu_1}{}_{\mu_2})\cdots(\delta^{\mu_{N-1}}{}_\nu + \Delta\omega^{\mu_{N-1}}{}_\nu) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left[\left(I + \frac{\omega}{N}\right)^N\right]^\mu{}_\nu = (e^\omega)^\mu{}_\nu = \sum_{n=0}^\infty\left(\frac{\omega^n}{n!}\right)^\mu{}_\nu
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

ただし，$\omega^\mu{}_\nu = \Delta\omega^\mu{}_\nu/N$ とした．一方 $\psi(x)$ に関する変換は,

$$
\begin{aligned}
\psi'(x') &= S(\Lambda)\psi(x) \\
S(\Lambda) &= \lim_{N\to\infty}\left(I - \frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)^N = \lim_{N\to\infty}\left(I - \frac{i}{4}\frac{\omega^{\mu\nu}}{N}\sigma_{\mu\nu}\right)^N \\
&= \exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) = \sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)^n
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

本義ローレンツ変換の下で $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$ のように変換される量は**ディラックスピノル** (**Dirac spinor**) と呼ぶ.

2.4　ローレンツ変換の具体例

以下いくつかの具体例を考えていこう.

[iv] 最後の式変形に，(2.2) を用いた.

[v] 式変形の途中で，アインシュタインの省略記法の添え字の変更，$[\eta_{\alpha\beta}I,\gamma^\nu] = 0$ と (2.2) から導かれる以下の関係式を用いた.

$$
\begin{aligned}
\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha &= 2\eta^{\alpha\beta}I \\
\eta_{\mu\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta + \eta_{\mu\beta}\gamma^\beta\gamma^\alpha &= 2\eta_{\mu\beta}\eta^{\alpha\beta}I \\
\gamma^\alpha\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma^\alpha &= 2\delta^\alpha{}_\mu I \\
\gamma_\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma_\alpha &= 2\delta^\beta{}_\alpha I
\end{aligned}
$$

最後の変形は添え字を変えただけである.

2.4.1　x 軸方向のローレンツブースト

$\Delta\omega^{01} = -\Delta\omega^{10} = \Delta\beta^1 (\Delta\omega^0{}_1 = \Delta\omega^1{}_0 = -\Delta\beta^1)$ 以外の $\Delta\omega^{\mu\nu}$ が 0 であるような場合を考える．$\Delta\beta^1 = \omega/N$ として，$\Delta\omega^\mu{}_\nu$ は，

$$\Delta\omega^\mu{}_\nu = \frac{\omega}{N}(I_L)^\mu{}_\nu, \qquad I_L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

と行列表示される．また，

$$I_L{}^{2k+1} = I_L, \qquad I_L{}^{2k} = I_L{}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

となる．

従って，ローレンツ変換の表示は，

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!}(I_L{}^n)^\mu{}_\nu \\ &= \delta^\mu{}_\nu - (I_L{}^2)^\mu{}_\nu + (I_L{}^2)^\mu{}_\nu \cosh\omega + (I_L)^\mu{}_\nu \sinh\omega \\ &= \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.28}$$

となる．[vi] 一方スピノルの変換は，

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega\sigma_{01}\right) \equiv S(\Lambda)_L \tag{2.29}$$

Dirac 表示では，

$$\sigma_{0i} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^i \\ -i\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

となり，$\sigma_{0i}^\dagger = \sigma_{0i}$ より，

$$\begin{aligned} S(\Lambda)_L^\dagger &= \exp\left(\frac{i}{2}\omega\sigma_{01}^\dagger\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{2}\omega\sigma_{01}\right) = S(\Lambda)_L \end{aligned} \tag{2.31}$$

となるため $S(\Lambda)_L$ は Hermite 行列である．

---

vi

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2.4.2　z 軸周りの空間回転

$\Delta\omega^{12} = -\Delta\omega^{21} = -\Delta\varphi^3$ $(\Delta\omega^1{}_2 = -\Delta\omega^2{}_1 = \Delta\varphi^3)$ 以外の $\Delta\omega^{\mu\nu}$ が 0 であるような場合を考える．$\Delta\varphi^3 = \varphi/N$ として，

$$\Delta\omega^\mu{}_\nu = \frac{\varphi}{N}(I_R)^\mu{}_\nu, \qquad I_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

と表示される．また，

$$\begin{gathered}({I_R}^{4k+1})^\mu{}_\nu = (I_R)^\mu{}_\nu, \qquad ({I_R}^{4k+2})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ ({I_R}^{4k+3})^\mu{}_\nu = -(I_R)^\mu{}_\nu, \qquad ({I_R}^{4k})^\mu{}_\nu = -({I_R}^2)^\mu{}_\nu \end{gathered} \tag{2.33}$$

となる．

従ってローレンツ変換の表示は，

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu &= \sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi^n}{n!}({I_R}^n)^\mu{}_\nu \\ &= \delta^\mu{}_\nu + ({I_R}^2)^\mu{}_\nu - ({I_R}^2)^\mu{}_\nu \cos\varphi + (I_R)^\mu{}_\nu \sin\varphi \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.34}$$

となる．これが z 軸周りの角度 φ の空間回転を表していることは明白だろう．[vii]

スピノルの変換は，

$$S(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\varphi\sigma_{12}\right) \equiv S(\varphi)_R \tag{2.35}$$

Dirac 表示では，

$$\sigma_{12} = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} = \Sigma^3, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

である．

このような $S(\varphi)_R$ の性質として，

$$S(0)_R = I, \qquad S(2\pi)_R = -I \tag{2.37}$$

となるため，波動関数の変換性は次のようになる．

$$\psi'(\phi + 2\pi) = S(2\pi)_R\psi(\phi) = -\psi(\phi), \qquad \psi'(\phi + 4\pi) = \psi(\phi) \tag{2.38}$$

[vii] 座標軸を φ 回転させるのは，点が $-\varphi$ 回転移動することと同じである．

従って波動関数は 4π 回転で元に戻る．[viii]

一般の空間回転については，

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3), \qquad \Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

を用いると，$\boldsymbol{s}$ 方向を軸とする角度 φ の空間回転を起こす演算子は，

$$S(\boldsymbol{\varphi})_R = \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\right) = \exp\left(i\varphi\boldsymbol{s}\cdot\frac{\boldsymbol{\Sigma}}{2}\right) \tag{2.40}$$

と表される．これより，回転の生成子が $\boldsymbol{\Sigma}/2$ であり，上下 2 成分に対する回転の生成子は $\boldsymbol{\sigma}/2$ で，電子のスピンが 1/2 である事実と合致する．また，$\boldsymbol{\Sigma}$ は Hermite 行列であるため，

$$S(\boldsymbol{\varphi})_R^\dagger = \exp\left(-i\boldsymbol{\varphi}\cdot\frac{\boldsymbol{\Sigma}^\dagger}{2}\right) = \exp\left(-i\boldsymbol{\varphi}\cdot\frac{\boldsymbol{\Sigma}}{2}\right) = S^{-1}(\boldsymbol{\varphi})_R \tag{2.41}$$

となるため，$S(\boldsymbol{\varphi})_R$ は Unitary 行列である．

2.5　4 元確率流密度のローレンツ変換性

以上をまとめると，無限小の速度 $\Delta\boldsymbol{v} = (\Delta v^1, \Delta v^2, \Delta v^3)$ によるローレンツブーストに対しては $\Delta\omega^{0i} = \Delta v^i/c$ である．また，単位ベクトル $\boldsymbol{s} = (s^1, s^2, s^3)$ を軸とする無限小回転 $\Delta\varphi$ に対しては $\Delta\omega^{ij} = -\sum_{k=1}^{3}\Delta\varphi\epsilon^{ijk}s^k$ である．

一般の本義ローレンツ変換は，ローレンツブーストと空間回転の合成で得られる．γ^0 と $\sigma_{\mu\nu}$ の間には，

$$\begin{aligned}
\gamma_0\sigma_{0i}\gamma_0 &= \frac{i}{2}\gamma_0[\gamma_0, \gamma_i]\gamma_0 \\
&= \frac{i}{2}\gamma_0(\gamma_0\gamma_i - \gamma_i\gamma_0)\gamma_0 \\
&= \frac{i}{2}(\gamma_0\gamma_0\gamma_i\gamma_0 - \gamma_0\gamma_i\gamma_0\gamma_0) \\
&= \frac{i}{2}(\gamma_i\gamma_0 - \gamma_0\gamma_i) \\
&= -\frac{i}{2}[\gamma_0, \gamma_i] \\
&= -\sigma_{0i}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_0\sigma_{ij}\gamma_0 &= \frac{i}{2}\gamma_0(\gamma_i\gamma_j - \gamma_j\gamma_i)\gamma_0 \\
&= \frac{i}{2}(\gamma_0\gamma_i\gamma_j\gamma_0 - \gamma_0\gamma_j\gamma_i\gamma_0) \\
&= \frac{i}{2}(\gamma_i\gamma_0\gamma_0\gamma_j - \gamma_j\gamma_0\gamma_0\gamma_i) \\
&= \frac{i}{2}(\gamma_i\gamma_j - \gamma_j\gamma_i) \\
&= \sigma_{ij}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

[viii] 電子のスピンが 1/2 であることに関係する．

が成り立つ．これを用いると，

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 S(\Lambda)^\dagger \gamma_0 &= \gamma_0 \exp\left(\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma^\dagger_{\mu\nu}\right)\gamma_0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\gamma_0\left(\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma^\dagger_{\mu\nu}\right)^n\gamma_0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{4}\gamma_0\omega^{\mu\nu}\sigma^\dagger_{\mu\nu}\gamma_0\right)^n \\
&= \exp\left(\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\gamma_0\sigma^\dagger_{\mu\nu}\gamma_0\right) \\
&= \exp\left(\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) \\
&= S^{-1}(\Lambda)
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

となる．[ix]

ここで，

$$
\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma_0 \tag{2.45}
$$

を**ディラック共役 (Dirac adjoint)** と定義する．

$\bar{\psi}(x)$ はローレンツ変換の下，

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}'(x') &= \psi'^\dagger(x')\gamma_0 \\
&= \psi^\dagger(x)S(\Lambda)^\dagger\gamma_0 \\
&= \psi^\dagger(x)\gamma_0\gamma_0 S(\Lambda)^\dagger\gamma_0 \\
&= \psi^\dagger(x)\gamma_0 S(\Lambda)^{-1} \\
&= \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

と変換される．これより，

$$
\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\psi(x) = \psi\bar{(x)}\psi(x) \tag{2.47}
$$

となり，$\bar{\psi}(x)\psi(x)$ はスカラー量である．

次に $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ はローレンツ変換で，

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) \\
&= \bar{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\psi(x) \\
&= \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

[ix] 途中で $\sigma^\dagger_{0i} = -\sigma_{0i}, \sigma^\dagger_{ij} = \sigma_{ij}$ から導かれる次式を用いた．

$$
\begin{aligned}
\gamma_0\sigma^\dagger_{0i}\gamma_0 &= \sigma_{0i} \\
\gamma_0\sigma^\dagger_{ij}\gamma_0 &= \sigma_{ij}
\end{aligned}
$$

となるため，ベクトル量である．また，$\alpha^i = \gamma^0\gamma^i$ であるため，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) &= (\psi^\dagger(x)\gamma_0\gamma^0\psi(x), \psi^\dagger(x)\gamma_0\gamma^i\psi(x)) \\ &= (\psi^\dagger(x)\psi(x), \psi^\dagger(x)\alpha^i\psi(x))\end{aligned} \tag{2.49}$$

であるため，4 元確率流密度は $j^\mu = c\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ が導かれる．

2.6 空間反転

ローレンツ変換に含まれる変換は本義ローレンツ変換以外にも**空間反転**がある．空間反転は次のように与えられる．

$$\boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{r}, \qquad t' = t \tag{2.50}$$

すなわち

$$x'^\mu = (\Lambda_S)^\mu{}_\nu x^\nu, \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{2.51}$$

となる．空間反転での $\psi(x)$ の変換性を

$$\psi'(x') = P\psi(x) \tag{2.52}$$

とすると，本義ローレンツ変換のときと同様にして

$$\left[i\hbar P\gamma^\mu P^{-1}(\Lambda_S)^\nu{}_\mu\frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m_e c\right]\psi'(x') = 0 \tag{2.53}$$

これより，

$$P\gamma^\mu P^{-1}(\Lambda_S)^\nu{}_\mu = \gamma^\nu, \qquad (\Lambda_S)^\nu{}_\mu\gamma^\mu = P^{-1}\gamma^\nu P \tag{2.54}$$

このような条件を満たす P は

$$P = \eta_P\gamma^0 \tag{2.55}$$

ただし η_P は位相因子で $\eta_P = e^{i\varphi_P}$ で，P は Unitary 行列となる．

Dirac 表示では γ^0 は対角行列であるため，$\psi(x)$ は P の固有状態となっている．静止した正エネルギー解は固有値 $P = \eta_P$ の固有状態，負エネルギー解は固有値 $P = -\eta_P$ の固有状態となっている．ここで，P の固有値は**固有パリティ**と呼ばれる．また，空間反転は 2 回作用させると $(\Lambda_S)^\mu{}_\lambda(\Lambda_S)^\lambda{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ と元に戻るべきであるため，$P^2 = I$ となるべきである．従って固有パリティは ± 1 に限られる．

$\bar{\psi(x)}$ 空間反転で，

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma_0 = \psi^\dagger(x)P^\dagger\gamma_0 = \psi^\dagger\gamma_0P^\dagger = \psi^\dagger\gamma_0P^{-1} = \bar{\psi(x)}P^{-1} \tag{2.56}$$

従って $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ は空間反転で不変である．一方 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ は

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)P^{-1}\gamma^\mu P\psi(x) = (\Lambda_S)^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) \tag{2.57}$$

と変換される．

以上から，Dirac 方程式は本義ローレンツ変換と空間反転の下で共変性があることがわかった．