

第3章

γ 行列に関する基本定理, Chiral 表示

3.1 γ 行列に関する基本定理

4×4 行列の単位行列 I と γ 行列から構成される以下の 5 種類 16 個の 4×4 行列

$$\begin{aligned} \Gamma_S &= I, & \Gamma_V^\mu &= \gamma^\mu, & \Gamma_T^{\mu\nu} &= \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\ \Gamma_P &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \equiv \gamma_5, & \Gamma_A^\mu &= \gamma_5\gamma^\mu \end{aligned} \quad (3.1)$$

について考察する. これらをまとめて $\Gamma_n = \{\Gamma_S, \Gamma_V^\mu, \Gamma_T^{\mu\nu}, \Gamma_P, \Gamma_A^\mu\}$ と表記する. Γ_n^2 は I か $-I$ となる. これらを統一した方が扱いが良いため, $-I$ となるものについては i をかけてこれらをまとめて $\tilde{\Gamma}_n$ とする. 具体的には,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_1 &= \Gamma_S = I, & \tilde{\Gamma}_2 &= \Gamma_V^0 = \gamma^0, & \tilde{\Gamma}_3 &= i\Gamma_V^1 = i\gamma^1, & \tilde{\Gamma}_4 &= i\Gamma_V^2 = i\gamma^2 \\ \tilde{\Gamma}_5 &= i\Gamma_V^3 = i\gamma^3, & \tilde{\Gamma}_6 &= i\Gamma_T^{01} = -\gamma^0\gamma^1, & \tilde{\Gamma}_7 &= i\Gamma_T^{02} = -\gamma^0\gamma^2, & \tilde{\Gamma}_8 &= i\Gamma_T^{03} = -\gamma^0\gamma^3 \\ \tilde{\Gamma}_9 &= \Gamma_T^{12} = i\gamma^1\gamma^2, & \tilde{\Gamma}_{10} &= \Gamma_T^{23} = i\gamma^2\gamma^3, & \tilde{\Gamma}_{11} &= \Gamma_T^{31} = i\gamma^3\gamma^1, & \tilde{\Gamma}_{12} &= \Gamma_P = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ \tilde{\Gamma}_{13} &= i\Gamma_A^0 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3, & \tilde{\Gamma}_{14} &= \Gamma_A^1 = -i\gamma^0\gamma^2\gamma^3, & \tilde{\Gamma}_{15} &= \Gamma_A^2 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^3, & \tilde{\Gamma}_{16} &= \Gamma_A^3 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

である.

一般に, $\tilde{\Gamma}_n$ には次のような性質がある.

- (1) 全ての n に対して $(\tilde{\Gamma}_n)^2 = I$ である.
- (2) 任意の $\tilde{\Gamma}_n, \tilde{\Gamma}_m$ に対して, $\tilde{\Gamma}_n\tilde{\Gamma}_m = \xi_{nm}\tilde{\Gamma}_l$ となるような $\tilde{\Gamma}_l$ が存在する. ここで ξ_{nm} は $\pm 1, \pm i$ のいずれかである. また, $n \neq m$ のときは $\tilde{\Gamma}_l \neq \tilde{\Gamma}_1 = I$ である. さらに, n を固定して m を 1 から 16 まで走らせると, l は 1 から 16 まで一度ずつとる.
- (3) $\tilde{\Gamma}_n$ と $\tilde{\Gamma}_m$ は可換か反可換のいずれかである.
- (4) $\tilde{\Gamma}_1$ を除く $\tilde{\Gamma}_n$ について, 反可換な $\tilde{\Gamma}_m$ が少なくとも 1 つ存在する.
- (5) $\tilde{\Gamma}_1$ を除く $\tilde{\Gamma}_n$ のトレースは 0 である.
- (6) $\tilde{\Gamma}_n$ は 1 次独立である.
- (7) $\tilde{\Gamma}_n$ は 4×4 行列を生成する.
- (8) 全ての γ^μ と可換な行列は単位行列の定数倍に限る.

また, 以下に示す定理が成り立つ.

γ 行列に関する基本定理

反交換関係

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (3.3)$$

を満たす2種類の γ 行列 $\{\gamma^\mu\}$ と $\{\gamma'^\mu\}$ は 4×4 の正則行列 S による相似変換

$$\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1} \quad (3.4)$$

によって結ばれる。ただし S は定数倍の任意性を除き一意に定まる。

また、上記の条件に加えて $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$ が成り立つならば、 S は Unitary 行列に選べる。従ってこの場合には $\{\gamma^\mu\}$ と $\{\gamma'^\mu\}$ は 4×4 は Unitary 同値となる。

3.2 双一次形式のローレンツ共変量

$\Gamma_n = \{\Gamma_S, \Gamma_V^\mu, \Gamma_T^{\mu\nu}, \Gamma_P, \Gamma_A^\mu\}$ を $\bar{\psi}(x)$ と $\psi(x)$ で挟むことでローレンツ共変量を構成することができる。

前に考察したように $\bar{\psi}(x)$ と $\psi(x)$ は本義ローレンツ変換の下、

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) \exp\left(\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right), \quad \psi'(x') = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\psi(x) \quad (3.5)$$

空間反転の下、

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)P^{-1}, \quad \psi'(x') = P\psi(x) \quad (3.6)$$

と変換される。これらを用いて次に挙げるようなローレンツ共変量のローレンツ変換性を理解出来る。

- (1) スカラー: $\bar{\psi}(x)\psi(x)$
- (2) ベクトル: $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$
- (3) 2 階テンソル: $\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$
 $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ であることを用いれば

$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\bar{\psi}(x)\sigma^{\alpha\beta}\psi(x) \quad (3.7)$$

と変換されることが示される。

- (4) 擬スカラー: $\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$ (本義ローレンツ変換で不変, 空間反転で符号が変化)
 γ_5 の定義と γ 行列の反交換性から,

$$\exp\left(\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\gamma_5\exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) = \gamma_5 \quad (3.8)$$

$$P^{-1}\gamma_5P = -\gamma_5 \quad (3.9)$$

が示される。また、ローレンツ変換が空間反転を含むと $\text{div}A = -1$ となるため、

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \text{div}A\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) \quad (3.10)$$

と変換される。

- (5) 擬ベクトル: $\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x)$ (本義ローレンツ変換の下ベクトル変換性, 空間反転の下符号が変化)

擬スカラーの時と同様に考えることで,

$$\exp\left(\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\gamma_5\gamma^\mu\exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma_5\gamma^\mu \quad (3.11)$$

$$P^{-1}\gamma_5\gamma^\mu P = -(\Lambda_S)^\mu{}_\nu\gamma_5\gamma^\mu \quad (3.12)$$

が成り立つことから,

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^\mu\psi'(x') = \text{div}\Lambda \cdot \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x) \quad (3.13)$$

と変換される.

3.3 Chiral 表示

Chiral 表示 (chiral representaton)(または Weyl 表示)ⁱ

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\mu \equiv (I, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (I, -\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.14)$$

を用いると, 質量 m の自由粒子に関する Dirac 方程式は,

$$\begin{pmatrix} -mc & i\hbar\sigma^\mu\partial_\mu \\ i\hbar\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & -mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

より詳細に書くと,

$$i\hbar\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi(x) - mc\eta(x) = 0 \quad (3.16)$$

$$i\hbar\sigma^\mu\partial_\mu\eta(x) - mc\xi(x) = 0 \quad (3.17)$$

と $\xi(x)$ と $\eta(x)$ に関する連立微分方程式が得られる. ここで, $\xi(x)$ と $\eta(x)$ はそれぞれ $\psi(x)$ の上 2 成分と下 2 成分を表している.

Chiral 表示を用いて具体的に $\sigma_{\mu\nu}$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \sigma_{0i} &= i\gamma_0\gamma_i = -i\gamma^0\gamma^i \\ &= -i\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\sigma^i & 0 \\ 0 & -i\sigma^i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

ⁱ 日本語ではカイラルとかキラルとか読まれる. 物理ではカイラルと呼ばれることが多いが, 化学では慣習的にキラルと呼ぶらしい.

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= i\gamma_i\gamma_j = i\gamma^i\gamma^j \\
&= i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \\
&= i \begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i\sigma^j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{ijk} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{ijk} \sigma^k \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

となる. ローレンツブーストのパラメータ $\omega = (\omega^{01}, \omega^{02}, \omega^{03})$, 空間回転のパラメータ $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) = (-\omega^{23}, -\omega^{31}, -\omega^{12})$ $\left(\varphi^k = -\sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \omega^{ij} \right)$ を用いると, 本義ローレンツ変換の下での $\psi(x)$ に関する変換行列は,

$$\begin{aligned}
S(\Lambda) &= \exp\left(-\frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \exp\left(i\varphi \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \omega \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\varphi \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \omega \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

と表され, 表現空間が既約分解される. これにより, $\xi(x)$ と $\eta(x)$ は本義ローレンツ変換性が異なる.

ここで, $\xi(x)$ と $\eta(x)$ はどちらもワイルフェルミオン (ワイルスピノル) またはカイラルフェルミオン, ファンデルウェルデンスピノル (van der Waerden spinor) と呼ばれる基本量である. また, 空間反転 $P = \eta_0\gamma_0$ によって $\xi(x), \eta(x)$ が入れ替わるため, 空間反転まで含めた変換に関しては $\psi(x)$ が既約である. $\psi(x)$ はディラックスピノル (Dirac spinor) と呼ぶ.

(??) から, 質量 0 の場合には $\xi(x)$ と $\eta(x)$ は独立に振舞い, **Weyl 方程式** に従う. $\xi(x)$ が従う Weyl 方程式は,

$$i\hbar\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi(x) = 0 \tag{3.21}$$

である. (??) に従うワイルフェルミオンは, **ヘリシティ (helicity)** の固有状態でもある. helicity は

$$\hat{\lambda} \equiv \mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \tag{3.22}$$

で与えられる. ここで $\mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ である. 質量 0 の場合, $p_0 = |\mathbf{p}|$ が成り立つため,

$$i\hbar\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu \Rightarrow \bar{\sigma}^\mu p_\mu = p_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \frac{2p_0}{\hbar} \left(\frac{\hbar}{2} + \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right) \tag{3.23}$$

となるため, (??) に代入することで

$$\begin{aligned}
\frac{2p_0}{\hbar} \left(\frac{\hbar}{2} + \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right) \xi(x) &= 0 \\
\frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \xi(x) &= -\frac{\hbar}{2} \xi(x)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

となることから, helicity の固有値は $-\hbar/2$ である. helicity の定義から物理的意味はスピンの運動方向への射影と考えられる. 従ってこの状態はスピンの方向と運動の方向が反平行ということになる. この状態を**左巻きの状態**と呼ぶ.

質量 0 の粒子は真空中を光速で運動するため、ローレンツブーストで粒子の運動方向が反転して見える慣性系に移ることはできない。従って、ワイルフェルミオンのヘリシティは本義ローレンツ変換の下不変である。一方左巻きの状態に対し空間反転を施すとスピンと運動方向が平行な**右巻きの状態**へと移る.ⁱⁱ従って、ワイルフェルミオンが単体で存在する場合には空間反転での不変性は成立しない。

右巻きの状態 $\eta(x)$ が従う Weyl 方程式は,

$$i\hbar\sigma^\mu\partial_\mu\eta(x) = 0 \quad (3.25)$$

である。

$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ は**カイラリティ (chirality)** とよび、Chiral 表現では

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

となる。カイラリティは次に定義される状態 ψ_L と ψ_R のそれぞれ固有値 -1, 1 の固有状態である。

$$\psi_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$\psi_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(x) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

以上から、質量 0 の粒子についてはヘリシティとカイラリティの固有状態は同一である。

ⁱⁱ 運動量はベクトルだがスピンは擬ベクトルであるため、ヘリシティは擬スカラーである。