

第 4 章

Dirac 方程式の解

4.1 Dirac 方程式の再導出

静止した自由粒子解にローレンツブーストを施すことで、Dirac 方程式を再導出する。静止した質量 m 、スピン $1/2$ の自由粒子は $E = mc^2$ のエネルギーを持つため、 $u^r(0) \exp(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t)$ で記述される。ただし $u^r(0)$ ($r = 1, 2$) は 2 成分波動関数で、

$$u^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

とする。これらはそれぞれスピンの z 成分 S_z の固有状態で、固有値 $\hbar/2, -\hbar/2$ を持つ。

これに負エネルギー解を加えることで S_z の固有状態を 4 つ構成でき、

$$\psi^s(x) = w^s(0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_s mc^2 t\right) \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1 \quad (4.3)$$

$$w^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w^3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w^4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

とする。このうち $s = 3, 4$ の下 2 成分が負エネルギー状態を表し、それぞれ S_z の固有値 $\hbar/2, -\hbar/2$ の固有状態である。また、 $w^s(0)$ の従う方程式は

$$\gamma_0 w^s(0) = \varepsilon_s w^s(0), \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

である。以降は Dirac 表示を用いる。

粒子が静止して見える慣性系 I_0 (座標を x_0^μ) に対して、速度 $-\mathbf{v}$ で等速直線運動する慣性系 I (座標を x^μ) に基づき粒子の運動を考える。I から見ると粒子は速度 $\mathbf{v} = v\mathbf{n}$ で運動している。ここで $\mathbf{n}$ は粒子の運動方向を表す単位ベクトルである。

ローレンツブーストにより、固有状態は

$$\psi^s(x) = w^s(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_s p_\mu x^\mu\right), \quad w^s(\mathbf{p}) = S(\Lambda) w^s(0) \quad (4.6)$$

と変換される。ここで、 $S(\Lambda)$ はスピノルの変換行列で、 p_μ の関数である。従って、 $\psi^s(x)$ の従う方程式を求めれば良いといえる。

(4.5) の両辺に左から $S(\Lambda)$ を作用させて,

$$S(\Lambda)\gamma_0 S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)w^s(0) = \varepsilon_s S(\Lambda)w^s(0) \quad (4.7)$$

$$\Gamma(p_\mu)w^s(\mathbf{p}) = \varepsilon_s w^s(\mathbf{p}) \quad (4.8)$$

と, $w^s(\mathbf{p})$ の従う方程式が表示できる. ただし $\Gamma(p_\mu) = S(\Lambda)\gamma_0 S^{-1}(\Lambda)$ とした. $\hat{p}_\mu = i\hbar\partial_\mu$ であることを用いると $\psi^s(x)$ の従う方程式は,

$$[\Gamma(\varepsilon_s i\hbar\partial_\mu) - \varepsilon_s]\psi^s(x) = 0 \quad (4.9)$$

以上から, $\Gamma(p_\mu)$ の具体的な形を求めていくことが目標となる.

ローレンツブーストのパラメータを $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{n} = (\omega^{01}, \omega^{02}, \omega^{03})$ とすると, σ_{0i} は,

$$\omega_{0i} = i\gamma_0\gamma_i = i\alpha_i = -i\alpha^i \quad (4.10)$$

であるため,

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3\omega^{0i}\alpha^i\right) = e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\alpha}} = e^{-\frac{\omega}{2}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}} \quad (4.11)$$

となる. また, ω と $\beta \equiv v/c$ の間の関係として, 慣性系 I_0 から I へは速度 $-\mathbf{v}$ のローレンツブーストで移ることに気をつけると,

$$\tanh\omega = -\beta, \quad \cosh\omega = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sinh\omega = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4.12)$$

が成り立つ.

以上から,

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2 &= (n^1\alpha^1 + n^2\alpha^2 + n^3\alpha^3)^2 \\ &= (n^1)^2(\alpha^1)^2 + (n^2)^2(\alpha^2)^2 + (n^3)^2(\alpha^3)^2 \\ &\quad + n^1n^2(\alpha^1\alpha^2 + \alpha^2\alpha^1) + n^2n^3(\alpha^2\alpha^3 + \alpha^3\alpha^2) + n^3n^1(\alpha^3\alpha^1 + \alpha^1\alpha^3) \\ &= I \end{aligned} \quad (4.13)$$

であることを用いて,

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= e^{-\frac{\omega}{2}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}} = \cosh\frac{\omega}{2} - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}\sinh\frac{\omega}{2} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh\frac{\omega}{2} & -\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\omega}{2} \\ -\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\omega}{2} & \cosh\frac{\omega}{2} \end{pmatrix} \\ &= \cosh\frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} I & -\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\omega}{2} \\ -\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\omega}{2} & I \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} I & \frac{c\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{E+mc^2} \\ \frac{c\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{E+mc^2} & I \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

ここで, $E > 0$ として,

$$\begin{aligned}
 \tanh \frac{\omega}{2} &= \frac{e^{\frac{\omega}{2}} - e^{-\frac{\omega}{2}}}{e^{\frac{\omega}{2}} + e^{-\frac{\omega}{2}}} \\
 &= \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{(e^{\frac{\omega}{2}} + e^{-\frac{\omega}{2}})^2} \\
 &= \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega} + 2} \\
 &= \frac{\sinh \omega}{\cosh \omega + 1} \\
 &= \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} + 1} \\
 &= \frac{-\frac{mc^2\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}}{\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + mc^2} \\
 &= \frac{-pc}{E + mc^2}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
 1 - \tanh^2 \frac{\omega}{2} &= 1 - \left(\frac{-pc}{E + mc^2} \right)^2 \\
 &= \frac{(E + mc^2)^2 - p^2 c^2}{(E + mc^2)^2} \\
 &= \frac{2mc^2}{E + mc^2} \\
 \cosh \frac{\omega}{2} &= \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

を用いた. 一方,

$$S^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} I & -\frac{c\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E + mc^2} \\ -\frac{c\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E + mc^2} & I \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

である.

以上から, $S(\Lambda)\gamma_0 S^{-1}(\Lambda)$ は,

$$\begin{aligned}
 &S(\Lambda)\gamma_0 S^{-1}(\Lambda) \\
 &= \frac{E + mc^2}{2mc^2} \begin{pmatrix} I & \frac{c\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E + mc^2} \\ \frac{c\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E + mc^2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\frac{c\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E + mc^2} \\ -\frac{c\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E + mc^2} & I \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{mc^2} \begin{pmatrix} E & -c\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ c\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -E \end{pmatrix} = \frac{1}{mc} \gamma^\mu p_\mu = \frac{1}{mc} \not{p}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

と表される. $p_\mu = (E/c, -\mathbf{p})$, γ^ν は Dirac 表示を用いている.ⁱ

ⁱ γ^μ と a_μ の内積を $\gamma^\mu a_\mu = \not{a}$ と表記し, Feynman のスラッシュ記法と呼ばれる.

従って, $w^s(\mathbf{p})$ の従う方程式は,

$$(\not{p} - \varepsilon_s mc)w^s(\mathbf{p}) = 0, \quad (\varepsilon_s \not{p} - mc)w^s(\mathbf{p}) = 0 \quad (4.19)$$

これより, $\psi^s(x) = w^s(\mathbf{p})e^{-i\varepsilon_s p_\mu x^\mu / \hbar}$ の従う方程式は,

$$(i\hbar \not{\partial} - mc)\psi(x) = 0 \quad (4.20)$$

となり, 自由粒子に関する Dirac 方程式が導かれる.

4.2 自由粒子解の性質

$w^s(\mathbf{p}), w^{s\dagger}(\mathbf{p}), \bar{w}^s(\mathbf{p}) \equiv w^{s\dagger}(\mathbf{p})\gamma_0 = w^{s\dagger}(0)S^\dagger(\Lambda)\gamma_0 = w^{s\dagger}(0)\gamma_0\gamma_0 S^\dagger(\Lambda)\gamma_0 = \bar{w}^s(0)S^{-1}(\Lambda)$ は次に挙げるような性質が成り立つ.

1. 運動量空間における Dirac 方程式

$$(\not{p} - \varepsilon_s mc)w^s(\mathbf{p}) = 0 \quad (4.21)$$

この両辺の Hermite 共役を取り, 右から γ_0 をかけると,

$$\begin{aligned} w^{s\dagger}(\mathbf{p})((\gamma^\mu)^\dagger p_\mu - \varepsilon_s mc)\gamma_0 &= 0 \\ w^{s\dagger}(\mathbf{p})(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - \varepsilon_s mc)\gamma_0 &= 0 \\ w^{s\dagger}(\mathbf{p})\gamma_0(\gamma^\mu p_\mu - \varepsilon_s mc) &= 0 \\ \bar{w}^s(\mathbf{p})(\not{p} - \varepsilon_s mc) &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

が導かれる.

2. 直交性と規格化条件

$$\begin{aligned} \bar{w}^s(\mathbf{p})w^{s'}(\mathbf{p}) &= \bar{w}^s(0)S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)w^{s'}(0) \\ &= \bar{w}^s(0)w^{s'}(0) \\ &= w^{s\dagger}(0)\gamma_0 w^{s'}(0) = \varepsilon_s \delta_{ss'} \end{aligned} \quad (4.23)$$

となるため, $\bar{w}^s(\mathbf{p})w^{s'}(\mathbf{p})$ はローレンツ不変量であり,

$$\bar{w}^s(\mathbf{p})w^{s'}(\mathbf{p}) = \varepsilon_s \delta_{ss'} \quad (4.24)$$

となる.

3. 完全性

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^4 \varepsilon_s w_\alpha^s(\mathbf{p}) \bar{w}_\beta^s(\mathbf{p}) &= \sum_{s=1}^4 \sum_{\alpha', \beta'} \varepsilon_s S(\Lambda)_{\alpha\alpha'} w_{\alpha'}^s(\mathbf{0}) \bar{w}_{\beta'}^s(\mathbf{0}) S^{-1}(\Lambda)_{\beta\beta'} \\ &= \sum_{\alpha', \beta'} S(\Lambda)_{\alpha\alpha'} \delta_{\alpha'\beta'} S^{-1}(\Lambda)_{\beta\beta'} \\ &= \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.25)$$

より,

$$\sum_{s=1}^4 \varepsilon_s w_\alpha^s(\mathbf{p}) \bar{w}_\beta^s(\mathbf{p}) = \delta_{\alpha\beta} \quad (4.26)$$

と完全性条件が成り立つ.

4. 確率密度に関する関係式運動量空間における Dirac 方程式から,

$$\begin{aligned} \bar{w}^s(\varepsilon_s \mathbf{p}) \gamma_0 (\tilde{\not{p}}' - \varepsilon_{s'} mc) w^{s'}(\varepsilon_{s'} \mathbf{p}) &= 0 \\ \bar{w}^s(\varepsilon_s \mathbf{p}) \frac{\gamma_0 \tilde{\not{p}}'}{\varepsilon_{s'} mc} w^{s'}(\varepsilon_{s'} \mathbf{p}) &= \frac{1}{2} \bar{w}^s(\varepsilon_s \mathbf{p}) \gamma_0 w^{s'}(\varepsilon_{s'} \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}^s(\varepsilon_s \mathbf{p}) (\tilde{\not{p}} - \varepsilon_s mc) \gamma_0 w^{s'}(\varepsilon_{s'} \mathbf{p}) &= 0 \\ \bar{w}^s(\varepsilon_s \mathbf{p}) \frac{\tilde{\not{p}} \gamma_0}{\varepsilon_s mc} w^{s'}(\varepsilon_{s'} \mathbf{p}) &= \frac{1}{2} \bar{w}^s(\varepsilon_s \mathbf{p}) \gamma_0 w^{s'}(\varepsilon_{s'} \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

が成り立つ. ただし, $\tilde{p}^\mu \equiv (p^0, \varepsilon_s \mathbf{p})$, $\tilde{p}'^\mu \equiv (p^0, \varepsilon_{s'} \mathbf{p})$ とした. これより,

$$\begin{aligned} w^{s\dagger}(\varepsilon_s \mathbf{p}) w^{s'}(\varepsilon_{s'} \mathbf{p}) &= \bar{w}^s(\varepsilon_s \mathbf{p}) \gamma_0 w^{s'}(\varepsilon_{s'} \mathbf{p}) \\ &= \bar{w}^s(\varepsilon_s \mathbf{p}) \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\not{p}} \gamma_0}{\varepsilon_s mc} + \frac{\gamma_0 \tilde{\not{p}}'}{\varepsilon_{s'} mc} \right) w^{s'}(\varepsilon_{s'} \mathbf{p}) \\ &= \bar{w}^s(\varepsilon_s \mathbf{p}) \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_\mu \tilde{p}^\mu \gamma_0}{\varepsilon_s mc} + \frac{\gamma_0 \gamma_\mu \tilde{p}'^\mu}{\varepsilon_{s'} mc} \right) w^{s'}(\varepsilon_{s'} \mathbf{p}) \\ &= \bar{w}^s(\varepsilon_s \mathbf{p}) \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_0 \gamma_0 p_0}{\varepsilon_s mc} + \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i \gamma_0 p^i}{mc} + \frac{\gamma_0 \gamma_0 p^0}{\varepsilon_{s'} mc} - \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_0 \gamma_i p^i}{mc} \right) w^{s'}(\varepsilon_{s'} \mathbf{p}) \\ &= \bar{w}^s(\varepsilon_s \mathbf{p}) \frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_s + \varepsilon_{s'}) p^0}{mc} w^{s'}(\varepsilon_{s'} \mathbf{p}) \\ &= \frac{E}{mc^2} \delta_{ss'} \end{aligned} \quad (4.29)$$

より,

$$w^{s\dagger}(\varepsilon_s \mathbf{p}) w^{s'}(\varepsilon_{s'} \mathbf{p}) = \frac{E}{mc^2} \delta_{ss'} \quad (4.30)$$

4.3 スピン状態

次にスピンについて考えよう. 静止系でスピンの“向き”が $\mathbf{s}$ の方向に向いた状態 w は, $\boldsymbol{\Sigma}$ を用いて

$$(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\Sigma}) w = w \quad (4.31)$$

として定義される. $\mathbf{s}$ はスピン状態ⁱⁱを指定する単位ベクトルである. $\mathbf{s}$ 方向を軸とする角度 φ の回転を引き起こす演算子は $S(\varphi)_R = \exp(i\varphi \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\Sigma}/2)$ である.

4 元運動量 p^μ , スピン状態 s^μ を有する正エネルギー解のディラックスピノルを $u(p, s)$ と表記する. $u(p, s)$ は方程式 $(\not{p} - mc)u(p, s) = 0$ を満たす.

ⁱⁱ スピンそのものではないことに注意.

静止系で $p_0^\mu = (mc, \mathbf{0})$ であり, スピン状態は $s_0^\mu = (0, \mathbf{s})$ であり,

$$(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\Sigma})u(p_0, s_0) = u(p_0, s_0) \quad (4.32)$$

を満たす. 任意の慣性系は静止系からローレンツ変換で移ることができるため, $p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p_0^\nu$, $s^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu s_0^\nu$ が成り立つ. また, $p^\mu p_\mu = p_0^\mu p_{0\mu} = m^2 c^2$, $s^\mu s_\mu = s_0^\mu s_{0\mu} = -1$, $p^\mu s_\mu = p_0^\mu s_{0\mu} = 0$ が成り立つ.

同様に負エネルギー解を $v(p, s)$ と表記する. $v(p, s)$ は方程式 $(\not{p} + mc)v(p, s) = 0$ を満たす. スピン状態については

$$(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\Sigma})v(p, s) = -v(p, s) \quad (4.33)$$

が成り立つとする.ⁱⁱⁱ

$w^s(\mathbf{p})$ と $u(p, s), v(p, s)$ の間には,

$$w^1(\mathbf{p}) = u(p, u_z), \quad w^2(\mathbf{p}) = u(p, -u_z) \quad (4.34)$$

$$w^3(\mathbf{p}) = v(p, -u_z), \quad w^4(\mathbf{p}) = v(p, u_z) \quad (4.35)$$

が成り立つ.^{iv}

4.4 エネルギーとスピンの射影演算子

自由粒子の状態は p^μ, s^μ によって指定できる. ローレンツ共変性を保ったまま, 任意の状態から状態 $w^s(\mathbf{p})$ を取り出す操作, 射影演算子を考えよう. 射影演算子 $P_s(\mathbf{p}) \equiv P_s(p, u_z, \varepsilon)$ は,

$$P_s(\mathbf{p})w^{s'}(\mathbf{p}) = \delta_{ss'}w^s(\mathbf{p}), \quad P_s(\mathbf{p})P_{s'}(\mathbf{p}) = \delta_{ss'}P_s(\mathbf{p}) \quad (4.36)$$

を満たす. また, エネルギーとスピンは独立な量であるため, $P_s(\mathbf{p})$ はエネルギーに関する射影演算子と, スピンに関する射影演算子の積になっていると考えられる.

運動量空間における Dirac 方程式から, 正エネルギー解は $\not{p}w^s(\mathbf{p}) = mcw^s(\mathbf{p})$, 負エネルギー解は $-\not{p}w^s(\mathbf{p}) = mcw^s(\mathbf{p})$ を満たす. 従って,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\not{p} + mc}{2mc}w^s(\mathbf{p}) &= w^s(\mathbf{p}) & (s = 1, 2) \\ \frac{-\not{p} + mc}{2mc}w^s(\mathbf{p}) &= w^s(\mathbf{p}) & (s = 3, 4) \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

が成り立つため, 正 (負) エネルギー解を取り出す射影演算子 $\Lambda_+(p)(\Lambda_-(p))$ は,

$$\Lambda_\pm(p) = \frac{\pm \not{p} + mc}{2mc} \quad (4.38)$$

で与えられる. 実際に, a, a' は $+, -$ を表すものとして

$$\begin{aligned} \Lambda_a(p)\Lambda_{a'}(p) &= \frac{\varepsilon_a \not{p} + mc}{2mc} \frac{\varepsilon_{a'} \not{p} + mc}{2mc} \\ &= \frac{m^2 c^2 (1 + \varepsilon_a \varepsilon_{a'}) + mc \not{p} (\varepsilon_a + \varepsilon_{a'})}{4m^2 c^2} = \left(\frac{1 + \varepsilon_a \varepsilon_{a'}}{2} \right) \Lambda_a(p) \end{aligned} \quad (4.39)$$

ⁱⁱⁱ 負符号が付いていることに注意.

^{iv} このような取り方は不自然かもしれないが, 後で効いてくる.

が成り立つため,

$$\Lambda_{\pm}^2(p) = \Lambda_{\pm}(p), \quad \Lambda_{\pm}(p)\Lambda_{\mp}(p) = 0 \quad (4.40)$$

が成立する.^v また, エネルギーの射影演算子は

$$\Lambda_+(p) + \Lambda_-(p) = I \quad (4.41)$$

が成り立つ.

スピン状態を取り出す射影演算子について考察する. 非相対論的な量子力学において, スピンの方向を z 軸に選んだときのスピン上向き下向きを取り出す演算子は,

$$P_+ = \frac{1 + \sigma_z}{2}, \quad P_- = \frac{1 - \sigma_z}{2} \quad (4.42)$$

で与えられる. これは z 軸方向の単位ベクトル $\mathbf{u}_{Oz} = (0, 0, 1)$ を用いて,

$$P_+ = \frac{1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}_{Oz}}{2}, \quad P_- = \frac{1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}_{Oz}}{2} \quad (4.43)$$

として表すことができる.

これの相対論的なバージョンとして, ローレンツ共変なものを求めたい. ここで,

$$\begin{aligned} \gamma_5 \gamma_3 \gamma_0 &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \\ &= \sigma_z \otimes I \end{aligned} \quad (4.44)$$

という関係を用いる. また, $u_{Oz}^\mu = (0, \mathbf{u}_{Oz}) = (0, 0, 0, 1)$ を用いると,

$$\gamma_5 \gamma_3 \gamma_0 = \gamma_5 \gamma_\mu u_{Oz}^\mu \gamma_0 = \gamma_5 \not{u}_{Oz} \gamma_0 \quad (4.45)$$

となる. ここで, γ_0 がついているとローレンツ共変性が怪しくなるため, スピンの射影演算子として

$$\Sigma(u_z) \equiv \frac{1 + \gamma_5 \not{u}_z}{2} \quad (4.46)$$

を与えて考察する. ただし $\not{u}_z \equiv \gamma_\mu u_z^\mu$, $u_z^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u_{Oz}^\nu$ としている. また, $p^\mu s_\mu = 0$ を満たす一般的なスピン状態 s_μ に対する射影演算子は

$$\Sigma(s) \equiv \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2} \quad (4.47)$$

とする.

^v 途中で,

$$\not{p}^2 = (\gamma^\mu p_\mu)^2 = m^2 c^2$$

を用いた.

静止系において,

$$\begin{aligned}
 \Sigma(u_{Oz})w^1(0) &= \frac{1 + \gamma_5 \not{u}_{Oz}}{2} w^1(0) \\
 &= \frac{1 + \gamma_5 \gamma_3 \varepsilon_1}{2} w^1(0) \\
 &= \frac{1 + \gamma_5 \gamma_3 \gamma_0}{2} w^1(0) \\
 &= \frac{1 + \sigma_z \otimes I}{2} w^1(0) \\
 &= w^1(0)
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma(-u_{Oz})w^2(0) &= \frac{1 - \gamma_5 \gamma_3 \varepsilon_2}{2} w^2(0) \\
 &= \frac{1 - \gamma_5 \gamma_3 \gamma_0}{2} w^2(0) \\
 &= \frac{1 - \sigma_z \otimes I}{2} w^2(0) \\
 &= w^2(0)
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma(-u_{Oz})w^3(0) &= \frac{1 - \gamma_5 \gamma_3}{2} w^3(0) \\
 &= \frac{1 + \gamma_5 \gamma_3 \varepsilon_3}{2} w^3(0) \\
 &= \frac{1 + \gamma_5 \gamma_3 \gamma_0}{2} w^3(0) \\
 &= \frac{1 + \sigma_z \otimes I}{2} w^3(0) \\
 &= w^3(0)
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma(u_{Oz})w^4(0) &= \frac{1 + \gamma_5 \gamma_3}{2} w^4(0) \\
 &= \frac{1 - \gamma_5 \gamma_3 \varepsilon_4}{2} w^4(0) \\
 &= \frac{1 - \gamma_5 \gamma_3 \gamma_0}{2} w^4(0) \\
 &= \frac{1 - \sigma_z \otimes I}{2} w^4(0) \\
 &= w^4(0)
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

が成立する. これより $\Sigma(u_z)$ は射影演算子となっており, 負エネルギー解のスピン状態を (4.33) のように選んだこととも両立している. また, 途中で $w^s(0)$ が γ_0 の固有状態で固有値が ε_s であることも用いた.^{vi}

スピノル u, v を用いると,

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(\pm u_z)u(p, \pm u_z) &= u(p, \pm u_z) & \Sigma(\pm u_z)v(p, \pm u_z) &= v(p, \pm u_z) \\ \Sigma(\mp u_z)u(p, \pm u_z) &= 0 & \Sigma(\mp u_z)v(p, \pm u_z) &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{4.52}$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(\pm s)u(p, \pm s) &= u(p, \pm s) & \Sigma(\pm s)v(p, \pm s) &= v(p, \pm s) \\ \Sigma(\mp s)u(p, \pm s) &= 0 & \Sigma(\mp s)v(p, \pm s) &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{4.53}$$

^{vi} ここでスピン射影演算子をあのような不自然にとったことが効いてくる.

以上から射影演算子 $P_s(\mathbf{p})$ は, $\Lambda_{\pm}(p), \Sigma(\pm u_z)$ の積として,

$$\left. \begin{aligned} P_1(\mathbf{p}) &= \Lambda_+(p)\Sigma(u_z) & P_2(\mathbf{p}) &= \Lambda_+(p)\Sigma(-u_z) \\ P_3(\mathbf{p}) &= \Lambda_-(p)\Sigma(-u_z) & P_4(\mathbf{p}) &= \Lambda_-(p)\Sigma(u_z) \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

演習問題

1. $\Sigma(\pm u_z)$ が射影演算子としての性質を満たしていることを確認せよ.

4.5 自由粒子解と波束の物理的意味

Schrödinger 方程式は線形方程式であるため, 平面波解の重ねあわせにより波束を構成できた. このことと同様に, Dirac 方程式も線形方程式であるため平面波解の重ねあわせにより波束を構成することができ, この波束もまた Dirac 方程式の解となる.

4.5.1 正エネルギー解のみから成る波束

はじめに正エネルギー解から構成された波束,

$$\psi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \sum_s b(p, s) u(p, s) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_{\mu} x^{\mu}\right) \quad (4.55)$$

積分は運動量の空間成分についてのみしている.^{vii} また, $b(p, s)$ は重み関数である.

スピノルの直交性を用いると,

$$\begin{aligned} \int \psi^{(+)\dagger}(x) \psi^{(+)}(x) d^3x &= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \sqrt{\frac{mc^2}{E'}} \\ &\quad \times \sum_{s'} \sum_s b^*(p', s') b(p, s) u^{\dagger}(p', s') u(p, s) \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p'_{\mu} - p_{\mu})x^{\mu}\right] d^3x \\ &= \int d^3p \int d^3p' \sqrt{\frac{m^2 c^4}{EE'}} \sum_{s'} \sum_s b^*(p', s') b(p, s) u^{\dagger}(p', s') u(p, s) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ &= \int d^3p \frac{mc^2}{E} \sum_s \sum_{s'} b^*(p, s') b(p, s) u^{\dagger}(p, s') u(p, s) \\ &= \int d^3p \frac{mc^2}{E} \sum_s \sum_{s'} b^*(p, s') b(p, s) \frac{E}{mc^2} \delta_{ss'} \\ &= \int d^3p \sum_s |b(p, s)|^2 \end{aligned} \quad (4.56)$$

が導かれる. ただし途中で, δ 関数の公式^{viii}, 4 元運動量は $p^{\mu}p_{\mu} = m^2c^2$ で一定であることから $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$

^{vii} $\sqrt{mc^2/E}$ をなぜ付ける必要があるのかわからない場合は, 自由粒子解の性質に戻って理由を考えよう.

ヒント: 確率密度はローレンツ不変量ではない

^{viii}

$$\delta(p - p') = 2\pi\hbar \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p' - p)x\right] dx$$

ならば $E = E'$ であることを用いた. $\int \psi^{(+)\dagger}(x)\psi^{(+)}(x)dx = 1$ であるとする, $|b(p, s)|^2$ は運動量が p , スピン状態が s であるような確率密度を表す.

次に, 速度演算子 $c\alpha^i$ の $\psi^{(+)}(x)$ についての期待値

$$J^{(+i)} \equiv \int \psi^{(+)\dagger}(x)c\alpha^i\psi^{(+)}(x)d^3x = \int \bar{\psi}^{(+)}(x)c\gamma^i\psi^{(+)}(x)d^3x \quad (4.57)$$

について考える.^{ix} 式変形には以下の **Gordon 分解**と呼ばれる恒等式を用いる.

$$c\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1 = \frac{1}{2m}\{\bar{\psi}_2\hat{p}^\mu\psi_1 - (\hat{p}^\mu\bar{\psi}_2)\psi_1\} - \frac{i}{2m}\hat{p}_\nu(\bar{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1) \quad (4.58)$$

Gordon 分解は次のようにして証明できる. ψ_1, ψ_2 がともに Dirac 方程式の解とすると,

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi_1 = 0, \quad (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi_2 \quad (4.59)$$

ψ_2 の方程式の Dirac 共役をとると,

$$i\hbar\partial_\mu\bar{\psi}_2\gamma^\mu + mc\bar{\psi}_2 = 0 \quad (4.60)$$

以上から次の2式を得る.

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2\phi(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi_1 - mc\psi_1) &= 0 \\ i\hbar\partial_\mu\bar{\psi}_2\gamma^\mu\phi\psi_1 + mc\bar{\psi}_2\phi\psi_1 &= 0 \end{aligned}$$

ただし a^μ は任意の4元ベクトルとする. 以上から,

$$\begin{aligned} -i\hbar(\partial_\mu\bar{\psi}_2)\gamma^\mu\gamma^\nu a_\nu\psi_1 + i\hbar\bar{\psi}_2 a_\mu\gamma^\mu\gamma^\nu(\partial_\nu\psi_1) - 2mc\bar{\psi}_2 a_\nu\gamma^\nu\psi_1 &= 0 \\ -i\hbar(\partial_\mu\bar{\psi}_2)\left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right)a_\nu\psi_1 + i\hbar\bar{\psi}_2 a_\mu\left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right)(\partial_\nu\psi_1) &= 2mc\bar{\psi}_2 a_\nu\gamma^\nu\psi_1 \\ -i\hbar(\partial_\mu\bar{\psi}_2)(\eta^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu})a_\nu\psi_1 + i\hbar\bar{\psi}_2 a_\mu(\eta^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu})(\partial_\nu\psi_1) &= 2mc\bar{\psi}_2 a_\nu\gamma^\nu\psi_1 \\ a_\nu[\bar{\psi}_2\hat{p}^\nu\psi_1 - (\hat{p}^\nu\bar{\psi}_2)\psi_1 - i\hat{p}_\mu(\bar{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1)] &= 2mca_\nu\bar{\psi}_2\gamma^\nu\psi_1 \end{aligned} \quad (4.61)$$

ここで, a_μ は任意の4元ベクトルであるため, 上記の等式が a_μ によらず成立するためには,

$$c\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1 = \frac{1}{2m}[\bar{\psi}_2\hat{p}^\mu\psi_1 - (\hat{p}^\mu\bar{\psi}_2)\psi_1] - \frac{i}{2m}\hat{p}_\nu(\bar{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1) \quad (4.62)$$

が成立しなくてはならない. (証明終)

^{ix} なぜこれが速度演算子を表すのかはハミルトン形式に戻って考えればわかる.

$$\begin{aligned} \frac{dp^i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}, & \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p^i} \\ H &= c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m_e c^2 \end{aligned}$$

これを用いて速度演算子の期待値を計算すると,

$$\begin{aligned}
J^{(+)}i &= \frac{1}{2m} \int \left[\left\{ \bar{\psi}^{(+)} \hat{p}^i \psi^{(+)} - (\hat{p}^i \bar{\psi}^{(+)}) \psi^{(+)} \right\} - i \hat{p}_\nu (\bar{\psi}^{(+)} \sigma^{i\nu} \psi^{(+)}) \right] d^3x \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \sqrt{\frac{mc^2}{E'}} \sum_s \sum_{s'} b^*(p', s') b(p, s) \\
&\quad \times \int \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p'_\mu - p_\mu) x^\mu \right] d^3x \frac{1}{2m} \bar{u}(p', s') [(p'^i + p^i) + i\sigma^{i\nu} (p'_\nu - p_\nu)] u(p, s) \\
&= \int d^3p \int d^3p' \sqrt{\frac{m^2 c^4}{EE'}} \sum_s \sum_{s'} b^*(p', s') b(p, s) \\
&\quad \times \frac{1}{2m} \bar{u}(p', s') [(p'^i + p^i) + i\sigma^{i\nu} (p'_\nu - p_\nu)] u(p, s) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\
&= \int d^3p \frac{p^i c^2}{E} \sum_s \sum_{s'} b^*(p, s') b(p, s) \bar{u}(p, s') u(p, s) \\
&= \int d^3p \frac{p^i c^2}{E} \sum_s \sum_{s'} b^*(p, s') b(p, s) \delta_{ss'} \\
&= \int d^3p \frac{p^i c^2}{E} \sum_s |b(p, s)|^2
\end{aligned} \tag{4.63}$$

従って,

$$\mathbf{J}^{(+)} = \langle c\boldsymbol{\alpha} \rangle_+ = \left\langle \frac{\mathbf{p}c^2}{E} \right\rangle_+ = \langle \mathbf{v}_g \rangle_+ \tag{4.64}$$

と表すことができる. $\langle \rangle_+$ は $\psi^{(+)}(x)$ に関する期待値を表す.

相対論的量子力学において, $[c\boldsymbol{\alpha}, H] \neq 0$ であるため速度演算子はハミルトニアンと可換ではない.^{*} 従って, 自由粒子に対しても $\mathbf{J}^{(+)}$ は保存しない. 実際, Heisenberg の運動方程式より,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J}^{(+)} = \frac{d}{dt} \langle c\boldsymbol{\alpha} \rangle_+ = \left\langle \frac{i}{\hbar} [H, c\boldsymbol{\alpha}] \right\rangle_+ \neq 0 \tag{4.65}$$

となるため, 時間変化する. また, $c\alpha^i$ の固有値は $\pm c$ であるため, 固有状態は正エネルギー解では構成できない.

さらに,

$$|\langle c\boldsymbol{\alpha} \rangle_+| = \left| \left\langle \frac{\mathbf{p}c^2}{E} \right\rangle_+ \right| = \left| \left\langle \frac{\mathbf{p}c^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}} \right\rangle_+ \right| = \left| \left\langle \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{\mathbf{p}^2}}} \right\rangle_+ \right| < c \tag{4.66}$$

より, $\mathbf{J}^{(+)}$ の大きさは常に c よりも小さい.

^{*} 証明は容易.

4.5.2 正エネルギー解と負エネルギー解から成る波束

次に正エネルギー解と負エネルギー解で構成された波束,

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \sum_s \left[b(p, s) u(p, s) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right) + d^*(p, s) v(p, s) \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right) \right] \quad (4.67)$$

を考える.

スピノルの直交性と確率解釈により,

$$\int \psi^\dagger(x) \psi(x) d^3x = \int d^3p \sum_s [|b(p, s)|^2 + |d(p, s)|^2] = 1 \quad (4.68)$$

が成り立つ. 速度演算子の $\psi(x)$ に関する期待値は, 再び Gordon 分解を用いて,

$$\begin{aligned} J^i &= \langle c\alpha^i \rangle \\ &= \int d^3p \left\{ \sum_s [|b(p, s)|^2 + |d(p, s)|^2] \frac{p^i c^2}{E} \right. \\ &\quad + ic \sum_s \sum_{s'} b^*(-p, s') d^*(p, s) \exp\left(\frac{2i}{\hbar} p_0 x^0\right) \bar{u}(-p, s') \sigma^{i0} v(p, s) \\ &\quad \left. - ic \sum_s \sum_{s'} b(-p, s') d(p, s) \exp\left(-\frac{2i}{\hbar} p_0 x^0\right) \bar{v}(p, s') \sigma^{i0} u(-p, s) \right\} \end{aligned} \quad (4.69)$$

となる. (4.69) には, 時間に依存しない項の他に, 正エネルギー解と負エネルギー解が干渉して激しく振動する項が存在する. 電子に関してはこの振動数を以下のように見積もることができる.

$$\omega_z \equiv \frac{2p_0 c}{\hbar} > \frac{2m_e c^2}{\hbar} \approx 2 \times 10^{21} \text{s}^{-1} \quad (4.70)$$

このような激しい振動は **Zitterbewegung** (ジグザグ運動) と呼ばれている. これによって, c/ω_z 程度の位置揺らぎが生じる.

外力が働かない限り, 正エネルギー解と負エネルギー解は独立に時間発展する. すなわち, 正エネルギー解のみで構成された波束は時間経過で負エネルギー解を含まない. しかし, 有限領域に粒子を局在させるためには一般には正エネルギー解と負エネルギー解の両方が必要である.

時刻 $t = 0$ において原点付近に Gauss 分布をした波束,

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = (\pi\Delta^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{2\Delta^2}\right) w^1(0) \quad (4.71)$$

を例に考える. 平面波の重ねあわせにこの分布を構成できるため,^{xi}

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \sum_s \left[b(p, s) u(p, s) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right) + d^*(p, s) v(p, s) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right) \right] \\ = (\pi\Delta^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{2\Delta^2}\right) w^1(0) \end{aligned} \quad (4.72)$$

^{xi} 要は Fourier 展開.

を満たすように $b(p, s), d^*(p, s)$ を定めれば良い。両辺に $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right)$ を掛けて積分すると,

$$\sqrt{\frac{mc^2}{E}} \sum_s [b(p, s)u(p, s) + d^*(-p, s)v(-p, s)] = \left(\frac{\Delta^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{\Delta^2 \mathbf{p}^2}{2\hbar^2}\right) w^1(0) \quad (4.73)$$

となる。さらにスピノルの直交性を用いて,

$$b(p, s) = \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \left(\frac{\Delta^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{\Delta^2 \mathbf{p}^2}{2\hbar^2}\right) u^\dagger(p, s) w^1(0) \quad (4.74)$$

$$d^*(-p, s) = \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \left(\frac{\Delta^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{\Delta^2 \mathbf{p}^2}{2\hbar^2}\right) v^\dagger(-p, s) w^1(0) \quad (4.75)$$

となる。以上からわかるように、負エネルギー解の振幅は非零で、正エネルギー解に比べて

$$\frac{|d|}{|b|} = \frac{|v^\dagger(-p, s)w^1(0)|}{|u^\dagger(p, s)w^1(0)|} \approx \frac{|\mathbf{p}|c}{E + mc^2} \quad (4.76)$$

となるため、 $|\mathbf{p}| \approx mc$ の場合に無視できなくなる。大まかに見積もって、波束は主に $|\mathbf{p}| < \hbar/\Delta$ の状態から構成されるが、 $|\mathbf{p}| \approx mc$ の場合に $\Delta < \hbar/mc$ となり、波束は粒子の Compton 波長を 2π で割った長さと同じ程度に局在化される。

4.6 Klein paradox

1次元階段ポテンシャルにおける Dirac 粒子の反射と透過を考察しよう。ポテンシャルが

$$V(z) = \begin{cases} 0 & (z < 0) \\ V_0 & (z > 0) \end{cases} \quad (4.77)$$

で与えられているとする。ただし $V_0 > 0$ である。この時の Dirac 方程式は,

$$\begin{pmatrix} mc^2 & -i\hbar\sigma_z \frac{d}{dz} \\ -i\hbar\sigma_z \frac{d}{dz} & -mc^2 \end{pmatrix} \psi = E\psi \quad (z < 0) \quad (4.78)$$

$$\begin{pmatrix} V_0 + mc^2 & -i\hbar\sigma_z \frac{d}{dz} \\ -i\hbar\sigma_z \frac{d}{dz} & V_0 - mc^2 \end{pmatrix} \psi = E\psi \quad (z > 0) \quad (4.79)$$

で与えられる。 z 軸正の方向へと z 軸に沿ってスピン $\hbar/2$ の自由粒子が入射したとする。 $z < 0$ の領域での入射波は,

$$\psi_i = e^{ikz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c\hbar k}{E + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

で与えられる。

一方反射波は,

$$\psi_r = a_r e^{-ikz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{c\hbar k}{E + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} + b_r e^{-ikz} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{c\hbar k}{E + mc^2} \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

$z > 0$ の領域での透過波は,

$$\psi_t = a_t e^{iqz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c\hbar q}{E - V_0 + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} + b_t e^{iqz} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{c\hbar q}{E - V_0 + mc^2} \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

と表される. 以上で a_r, b_r, a_t, b_t は定数であり, k, q はそれぞれ

$$c^2 \hbar^2 k^2 = E^2 - m^2 c^4 \quad (4.83)$$

$$c^2 \hbar^2 q^2 = (E - V_0)^2 - m^2 c^4 = (E - V_0 - mc^2)(E - V_0 + mc^2) \quad (4.84)$$

から定められる.

$z = 0$ での波動関数の連続性から,

$$1 + a_r = a_t \quad (4.85)$$

$$b_r = b_t = 0 \quad (4.86)$$

$$1 - a_r = r a_t \quad (4.87)$$

$$r \equiv \frac{q}{k} \frac{E + mc^2}{E - V_0 + mc^2} \quad (4.88)$$

第2式は反射・透過でスピンの反転は起こらないことを意味する. 第1式と第3式を連立させて解くと,

$$a_t = \frac{2}{1 + r}, \quad a_r = \frac{1 - r}{1 + r} \quad (4.89)$$

と求めることができる.

この結果を V_0 の大きさで場合分けをして考察する.

1. $V_0 > 0$ かつ $|E - V_0| < mc^2$ の場合

(4.84) より, q は純虚数であるため, 波動関数は $z > 0$ の領域で指数関数的に減少する. 侵入長は $\delta \approx \hbar/mc$ である.

2. $V_0 > E + mc^2$ の場合

非相対論的な量子力学ではポテンシャルの高さが大きくなるにつれてその侵入長は短くなったため, より強く波動関数が減衰することが予想できる. しかし, (4.83) より q は実数となり, 波動関数は $z > 0$ の領域を伝搬する.

透過率 T と反射率 R は,

$$T \equiv \frac{|j_t|}{|j_i|} = \frac{4r}{(1 + r)^2}, \quad R \equiv \frac{|j_r|}{|j_i|} = \frac{(1 - r)^2}{(1 + r)^2} \quad (4.90)$$

となる。ただし j_i, j_r, j_t は入射波, 反射波, 透過波に関する確率流で,

$$j_i = c\psi_i^\dagger \alpha^3 \psi_i = \frac{2c^2 \hbar k}{E + mc^2} \quad (4.91)$$

$$j_r = c\psi_r^\dagger \alpha^3 \psi_r = -\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 \frac{2c^2 \hbar k}{E + mc^2} \quad (4.92)$$

$$j_t = c\psi_t^\dagger \alpha^3 \psi_t = \left(\frac{2}{1+r}\right)^2 \frac{2c^2 \hbar q}{E - V_0 + mc^2} \quad (4.93)$$

である。 $T + R = 1$ より, 確率の保存則, $|j_i| = |j_r| + |j_t|$ が成り立つ。ただし, $r < 0$ であるため $T < 0, R > 1$ が導かれる。

反射率や透過率は非負で 1 を超えないはずだが, ポテンシャルの値によってはこれが崩れるという結論がでた。この原因は負エネルギー解が存在するためであると予想される。自由粒子の取るエネルギーの範囲は $mc^2 \leq E < \infty, -\infty < E \leq -mc^2$ である。負エネルギー状態に V_0 が作用すると, エネルギーの範囲は $-\infty < E \leq V_0 - mc^2$ となる。 $V_0 > E + mc^2$ のとき, 負エネルギー解の一部は $E > 0$ の振動解として振る舞う。すなわち, ポテンシャルの効果で負エネルギー解から正エネルギー解と同じ形の解が生成されることからこのようなパラドクスが発生すると考えられる。